数理解析研究所講究録
第 1826 巻 2013 年 186-198

Exact critical values of the standard L functions of vector valued Siegel modular forms

Tomoyoshi Ibukiyama(Osaka University) and
Hidenori Katsurada(Muroran Institute of Technology)

1 概要

Zagier は 1977 年ごろに、ラマンヌジャンのデルタ関数 Δ の 4 次対称 L 関数の 5 つの「臨界点」における具体的な値を数値的に予想した。その後、これを検証した人はいなかったと思われるが、今回、周期の部分の定数倍を除いて、この予想を証明した。もっと具体的に言うと、臨界点は 5 つあるので、これらの 4 つの比を考えると、これらはすべて Zagier が予想した数値通りであったというのが、具体的な定理の中身である。この証明のためには、ベクトル値のジーゲル保型形式の構成、その標準 L 関数の計算、および pullback formula に使用する微分作用素の構成などが必要になる。ついでに Kim-Ramakrishnan-Shahidi lifting とそうでないものの固有値の合同の例を一つ上げておく。

2 Zagier の予想

H_n を n 次のジーゲル上半空間とする。f をウェイトが k の $\Gamma_1 = SL_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式で、ヘッケ固有関数とする。$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ ($a(1) = 1$, $q = exp(2\pi i\tau)$, $\tau \in H_1$) に対して、

$$1 - a(p)p^{-s} + p^{k-1-2s} = (1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p p^{-s})$$

で α_p, β_p を定める。f の m 次対称 L 関数というのは

$$L(s, f, \mathrm{Sym}(m)) = \prod_{p:prime} \prod_{i=0}^{m} (1 - \alpha_p^{m-i} \beta_p^i p^{-s})^{-1}$$

とおいて定義される関数である。これはもちろん十分大きな s では収束するが、全 s 平面への解析接続と関数等式は、大きな m については今でもわかっ

ていないようである。一般に適当によい L 関数については、L 関数の臨界値 (critical values) というのが Deligne によって定義されており、これについては適当な超越元と代数的数の積であると予想されている。どこの値が臨界値と呼ばれるかというのは、当該の L 関数のガンマ因子で決まっている概念なので、少なくとも L 関数の関数等式が予想できなければ臨界値について論じることはできない。Deligne が以上のような予想を述べたのは 1977 年あたりのようである。以下では主として f が Ramanujan のデルタ関数

$$\Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

である場合を扱う。実際には、Zagier は 1976 年ごろに $L(s,\Delta,\mathrm{Sym}(m))$ の特殊値を $m \leq 4$ について近似計算をしていた。$m = 1, 2$ については、特殊値の計算の実行の仕方はあったが、$m = 3, 4$ については、よくわからないので、近似値を具体的な有理数と Δ の Petersson 内積の値で解釈するには、何らかの Anzatz が必要であったのであろう。Deligne の論文 [3] には、Zagier が 3 次と 4 次の対称 L 関数の実験に関係して、それをきちんと解釈する予想を切望していて、これがそもそも予想を述べる大きな動機の一つだったという経緯が書かれている。

その後 $m = 3$ の場合は、水本信一郎により、Klingen Eisenstein series などを用いて、具体的に臨界値が計算され、Zagier の予想は確認された。しかし $m = 4$ のときは、不明のままであった。

さて、そもそも出発点の Zagier の予想を述べておこう。

Conjecture 2.1 (Zagier [17]) 臨界点 $s = 24, 26, 28, 30, 32$ について、次の公式が成り立つはずである。

$$(2\pi)^{-3s+33}\Gamma(11)^{-1}\Gamma(s)\Gamma(s-11)L(s,\Delta,Sym(4)) = c(s)2^{33}(\Delta,\Delta)^3.$$

ここで $c(s)$ は次の表で与えられる定数である。

s	$c(s)$
24	$2^5 \times 3^2$
26	$2^5 \times 3 \times 5$
28	$2^2 \times 23 \times 691/7^2$
30	$2^3 \times 653$
32	$2 \times 3 \times 34981^*/7$

また Petersson 内積を次のように定義している。

$$(\Delta,\Delta) = \int_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash H_1} |\Delta(\tau)|^2 y^{10} dxdy.$$

ただし、* の部分は、実は彼の論文では、34981 ではなくて 34891 と書かれているが、後者は $34891 = 23 \times 37 \times 41$ と合成数になってしまうから、これは明らかにミスプリである。2011 年の Arbeitstagung でこれを指摘したところ、Zagier によれば、残っている当時のノートに記された計算自身はもちろん正しくて、書き写すのを間違えたらしいとのことであった。

3 主結果

意味の説明は後回しにして、まず主張から述べる。

n 次ジーゲル上半空間を H_n, n 次ジーゲルモジュラー群 $Sp(n,\mathbb{Z})$ を Γ_n と書く。記号 $A_{k,j}(\Gamma_2)$ で、2次のウェイトが $\det{}^k Sym(j)$ であるようなベクトル値ジーゲル保型形式のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を表す。すなわち、$\tau \in H_2$, $u = (u_1, u_2)$ を変数のベクトルとするとき、$A_{k,j}(\Gamma_2)$ の元というのは、H_2 上の正則関数を係数に持つ u の j 次斉次多項式 $F(\tau, u)$ であって、

$$F(\gamma\tau, u) = \det(c\tau + d)^k F(\tau, u(c\tau + d)) \qquad (\gamma \in \Gamma_2)$$

となるもののことである。このうちでジーゲル Φ 作用素で消えるものをジーゲルカスプ形式とよび、その空間を $S_{k,j}(\Gamma_2)$ と書くが、k が奇数ならば $A_{k,j}(\Gamma_2) = S_{k,j}(\Gamma_2)$ である。また j が奇数ならば、$A_{k,j}(\Gamma_2) = 0$ である。$k \geq 5$ ならばこれらの次元公式は対馬により知られている。特に $\dim S_{13,10}(\Gamma_2) = 2$ である。

Theorem 3.1 あるジーゲルカスプ形式 $F \in S_{13,10}(\Gamma_2)$ で $s = 24, 26, 28, 30, 32$ のすべてについて

$$(2\pi)^{33-3s}\Gamma(11)^{-1}\Gamma(s)\Gamma(s-11)L(s, \Delta, Sym(4)) = c(s)(F, F).$$

となるものが存在する。ここで $c(s)$ は *Zagier* の予想で与えられたものと同じ数を表す。

ここでのポイントは F が s のとる5つの数に無関係にひとつ定まっているということである。なぜジーゲル保型形式がでてくるかという説明はあとでするが、Zagier の予想との違いは $(\Delta, \Delta)^3$ が (F, F) におきかわっていることである。言い換えると、$(\Delta, \Delta)^3 = (F, F)$ がわかれば Zagier の予想が完全に証明されたことになるが、これを証明する手段はよくわからない。

もっと一般に、次のようなことが言える。

ヘッケ固有関数 $f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ の固有値全体が有理数体上生成する体を $\mathbb{Q}(f)$ と書こう。

Theorem 3.2 任意のヘッケ固有関数 $f \in S_k(\mathit{\Gamma}_1)$ に対して、f のみによる定数 $c(f)$ が存在して、$L(l, f, Sym(4))/\pi^{-3k+3l+3}c(f) \in \mathbb{Q}(f)$ が任意の $2k \leq l \leq 3k-4$ となる偶数 l について成立する。

この定理は、1変数保型形式からベクトル値ジーゲル保型形式へのリフトに関する Ramakrishnan-Shahidi の定理 [16] とベクトル値ジーゲル保型形式の特殊値に関するの小島教知の結果の単純な系であるが、これに比較すると Theorem 3.1 の証明は、具体的な数字が出ている点で、はるかに面倒である。抽象的な結果だけ考える人はこういう計算を軽視する傾向があるが、内容の実質的な深さが違うというべきだと思う。

Theorem 3.1 の証明はつぎのような部分 (1), (2), (3) からなっている。
(1) Kim-Ramakrishnan-Shahidi lifting: Ramakrishnan-Shashidi [16] はヘッケ固有関数 $f \in S_k(\Gamma_1)$ からヘッケ固有関数になるベクトル値ジーゲル保型形式 F でウェイトが $\det^{k+1} Sym(k-2)$ であるものへのリフトが存在して、

$$L(s, f, \mathrm{Sym}(3)) = L(s, F, Sp),$$

となることを主張している。ここで Sp はスピノール L 関数を意味している。このようなリフトの存在は Kim-Shahidi がスカラー値の時に予想していた。実は伊吹山はベクトル値の実験を通じて、一般に離散群は岩堀部分群にとればよいことと、ベクトル値の場合のウェイトの対応を実験結果とともに予想したプレプリント [7] を書いていた。このプレプリントは Ramakrishnan-Shahidi の論文にも引用されている。特に Δ に対しては、リフトされた側のジーゲル保型形式は $A_{13,10}(\Gamma_2) = S_{13,10}(\Gamma_2)$ に属する。なお、重要な注意として、彼らの定理はガロア表現などを通じて証明されており、実際に具体的に保型形式を構成して見せたわけではないので、これは存在定理である。したがって、彼らの論法によって、もとの内積とリフトされた側の内積の関係などがわかるとは到底思えない。またもとのフーリエ係数でリフトされた側のフーリエ係数がどう書けるかも全く分かっていない。ここはかなり欲求不満を感じるところである。より構成的な別証明があるとよいのだが。以前にたとえば逆定理を用いて証明できないかを考えたことがあるのだが、ベクトル値であることや、リフトされた保型形式の（自然に定義される）Koecher-Maass 級数をそのまま計算すると消えるらしいことなどから、十分な手掛かりが得られなかった。残念ながら今のところ別証明はよくわからない。

次の結果は、なぜか [16] には書かれていないようだが、記号を上の通りとして、彼らの定理の単純な系として得られる。

$$L(s, f, \mathrm{Sym}(4)) = L(s-22, F, St).$$

ここで St はスダンダード L 関数を表す。よって問題は Δ に対応する F を具体的に与え、その臨界点 $s = 2, 4, 6, 8, 10$ での $L(s, F, St)$ を計算することにある。

さて、普通の論文ではあまり丁寧に書けないので、この機会にここに登場する L 関数について、少し復習しておく。定義は $\alpha_{0,p}$, $\alpha_{1,p}$, $\alpha_{2,p}$ を各素数

p におけるいわゆる佐武パラメーターとするとき、次のようになる。

$$L(s,F,Sp)=\prod_p[(1-\alpha_{0,p}p^{-s})(1-\alpha_{0,p}\alpha_{1,p}p^{-s})(1-\alpha_{0,p}\alpha_{1,p}p^{-s})(a-\alpha_{0,p}\alpha_{1,p}\alpha_{2,p}p^{-s})]^{-1}$$

$$L(s,F,Sp)=\prod_p[(1-p^{-s})(1-\alpha_1p^{-s})(1-\alpha_1^{-1}p^{-s})(1-\alpha_2p^{-s})(1-\alpha_2^{-1}p^{-s})]^{-1}.$$

ここで、佐武パラメータの定義は L 関数の正規化をどうとるかで少しずれるが、ここでは関数等式は $F\in S_{k,j}(\Gamma_2)$ に対して、Sp で $s\to 2k+j-2-s$, St で $s\to 1-s$ に対して成立するようにとっている。標準 L 関数のガンマ因子は、小島教知 [15] により与えられており、$F\in S_{k,j}(\Gamma_2)$ に対しては

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k+j-1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-2)$$

である。ただしここで $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$. さて、$f\in S_k(\Gamma_1)$ の佐武パラメータを α_p, β_p として、リフトされた先の $S_{k+1,k-2}(\Gamma_2)$ と比較すると、(ワイル群の作用などの対称化を無視すれば) $\alpha_{0.p}=\alpha_p^3$, $\alpha_0\alpha_1\alpha_2=\beta_p^3$, $\alpha_0\alpha_1=\alpha_p^2\beta_p$, $\alpha_0\alpha_2=\alpha_p\beta_p^2$ となるから標準 L 関数の p 因子は

$$(1-p^{-s})(1-(\alpha_p/\beta_p)p^{-s})(1-(\beta_p/\alpha_p)p^{-s})(1-(\alpha_p/\beta_p)^2p^{-s})(1-(\beta_p/\alpha_p)^2p^{-s})$$

であり、s を $s-2k+2$ に変えると $\alpha_p\beta_p=p^{k-1}$ に注意して

$$(1-\alpha_p^4p^{-s})(1-\alpha_p^3\beta_pp^{-s})(1-\alpha_p^2\beta_p^2p^{-s})(1-\alpha_p\beta_p^3p^{-s})(1-\beta_p^4p^{-s})$$

となる。よって、$L(s-2k+2,F,St)=L(s,f,\mathrm{Sym}(4))$ となる。ちなみに、対称 m 次 L 関数のガンマ因子と関数等式は、[17] にでている予想としては次のとおりである。
ガンマ因子:

$$\gamma_m(s)=\begin{cases}(2\pi)^{-rs}\prod_{\nu=0}^{r-1}\Gamma(s-\nu(k-1)) & \text{if } m=2r-1\\ \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}-\left[\frac{r(k-1)}{2}\right]\right)\gamma_{2r-1}(s) & \text{if } m=2r.\end{cases}$$

関数等式は $s\to(k-1)m+1-s$ である。特に $m=4$ ならば、$\gamma_4(s)=\pi^{-5s/2}\Gamma((s-2k+2)/2)\Gamma(s)\Gamma(s-k+1)$, 関数等式は $s\to 4k-3-s$ で成り立つはずである。これはもちろん上のジーゲル保型形式の関数等式と整合している。

(2) 臨界点 s での $L(s,F,St)$ の計算には小島教知 [15] の公式を用いる。これはスカラー値の4次のアイゼンシュタイン級数を微分作用素でずらして、その後、2つの2行2列の対角ブロックへの制限をとったものが、ベクトル値保型形式のテンソルでかけ、その係数が標準 L 関数の臨界値になるという

結果である。
(3) この (2) の計算で、対角ブロックへの制限に対して保型性を保つような微分作用素の一般論、およびその具体的な作用素の構成を用いる。実質上はこの部分の計算が最も複雑である。

以上の計算を実際に実行するには、次のようなことが必要になる。
(i) $S_{13,10}(\Gamma_2)$ の基底とそのフーリエ係数.
(ii) 次数4のウェイト $l = 4, 6, 8, 10, 12$ のスカラー値アイゼンシュタイン級数の具体的なフーリエ係数.
(iii) E_l に対する微分作用素 $\mathcal{D}$ で $\mathcal{D}E_l$ を (2,2) 行列2つの対角ブロックに制限すると $S_{13,10}(\Gamma_2)$ の元のテンソルでかけるようなものの構成。

これらについて、若干説明する。ベクトル値ジーゲル保型形式の構成法はいろいろあるが、一番一般的な方法は球関数つきの2次形式のテータ関数で与えるやりかたである。今は Γ_2 に関する保型形式を求めようとしているので、2次形式はレベルが1のもの (even unimodular lattice) であれば何でもよいわけだが、現実問題として（やってみればわかるが）E_8 lattice 以外のものをとっても計算が面倒になるだけで、実際的ではない。そこで lattice は E_8 をとることに決めて、球関数をいろいろ動かしてみる。ここで面倒なのは、球関数をいい加減に選ぶと、構成されたテータ関数は往々にしてゼロになることである。原理的に言えば E_8 の自己同型群で不変な球関数から探せばよいのだが、自己同型群は非常に大きいし、たとえ不変なものが探せたとしても、ゼロになるかどうかを前もって予想するのはかなり難しい。よってこの部分は計算機で計算してみてゼロにならないことを確かめるという実験的な方法に頼ることになる。(テータ関数でいつでも書けるかどうかというのは、basis problem に関する Boecherer の判定法があって、ウェイトが十分大きければかけるはずではあるが、実際に見つけるのは別問題である。) しかし、何にしても今は $\dim S_{13,10}(\Gamma_2) = 2$ なので、構成はあまり困難ではない。実際には次のようにする。まず E_8 lattice というのは

$$E_8 = \{(x_i)_{1\le i\le 8}; 2x_i \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{8} x_i \in 2\mathbb{Z},\ x_i - x_j \in \mathbb{Z}\}$$

で与えられる。複素ベクトル $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in \mathbb{C}^8$ に対して、内積を普通に $(x,y) = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i$ と定義する。ベクトル $a, b \in \mathbb{C}^8$ で $(a,a) = (b,b) = (a,b) = 0$ となるものをとる。$\tau \in H_2$ に対して、$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{pmatrix}$ と書く。整数 $j \ge 0$ と $\nu \ge 0$ ひとつ固定する。各 $0 \le i \le j$ に対して H_2 上の関数を

$$\vartheta_{a,b,i}(\tau) = \sum_{x,y\in E_8} (x,a)^{j-i}(y,a)^i \begin{vmatrix} (x,a) & (x,b) \\ (y,a) & (y,b) \end{vmatrix}^{\nu} exp(2\pi i[n(x)\tau_{11}+2(x,y)\tau_{12}+(y,y)\tau_{22})$$

と定義する。このときよく知られているように（たとえば Freitag の本参照）

$$f_{a,b}(\tau,u)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\vartheta_{a,b,i}(\tau)u_1^{j-i}u_2^{i}$$

とおくと $f_{a,b}\in A_{k,j}(\Gamma_2)$ となる。我々の場合には、

$$\begin{aligned}
a_1 &= (2,1,i,i,i,i,i,0)\\
a_2 &= (1,-1,i,i,1,-1,-i,i)\\
b_1 &= (3,2i,i,i,i,i,i,0)\\
b_2 &= (1,i,-1,i,1,i,-i,1)
\end{aligned}$$

とおき、$j=10$, $\nu=9$ に対して $f_{13,10a}:=f_{a_1,a_2}$, $f_{13,10b}:=f_{b_1,b_2}$ を上のように定義すると、これが $S_{13,10}(\Gamma_2)$ の基底になる。Δ からここへはリフトが1次元分あるはずだが、この像は、たとえば 2 での Hecke 作用素 $T(2)$ を作用させてその固有値を見れば、直ちにわかる。実際には、ヘッケ固有関数は次の２つで与えられる。

$$\begin{aligned}
F_{13,10a}&=(3677f_{13,10a}+120147f_{13,10b})/(2^2\times 23\times 21800833),\\
F_{13,10b}&=(-107841f_{13,10a}+21791f_{13,10b})/(2\times 19\times 23\times 21800833).
\end{aligned}$$

これらのオイラー因子は、たとえば２では

$$\begin{aligned}
H_2(s,F_{13,10a}) &= 1-84480T+10611589120T^2-84480\cdot 2^{33}T^3+2^{66}T^4\\
&= (1+49152T+2^{33}T^2)(1-133632T+2^{33}T^2),\\
H_2(s,F_{13,10b}) &= 1+52800T-889978880T^2+52800\cdot 2^{33}T^3+2^{66}T^4,
\end{aligned}$$

であるのが、簡単にわかる。$\Delta(\tau)=q-24q^2+\cdots$ と比較して、

$$\alpha_2^3+\alpha_2^2\beta_2+\alpha\beta_2^2+\beta_2^3=(\alpha+\beta)^2-2\cdot 2^{11}(\alpha+\beta)=24^3+2^{12}\cdot 24=84480$$

から $F_{13,10a}$ が Δ からのリフトであり、もう一方は違うということがわかる。

ちなみに、普通リフトがあると、リフトとリフト以外の間の固有値の合同が成立することが多い。今の場合はリフトとリフトでないものが一つずつあるので $F_{13,10a}$ と $F_{13,10b}$ の固有値の間には、きれいな合同が成り立つとうれしい。実際、次の定理のように合同はある。

一般にヘッケ固有関数 $F\in A_{k,j}(\Gamma_2)$ に対して、ヘッケ作用素 $T(n)$ の F での固有値を $\lambda(n,F)$ と書こう。

Theorem 3.3 記号を上の通りとして、任意の自然数 n に対して

$$\lambda(n,F_{13,10a})\equiv\lambda(n,F_{13,10b}) \bmod 13$$

となる。

この定理において、13 というのは大きな特徴的な素数というわけではないし、また特に何かの L 関数の特殊値の因子に出てくるわけでもないので、その点では非常に面白いとは言えないかもしれないが、合同があること自身には意味があると思うので、記載しておく。

以上で、$F_{13,10a}, F_{13,10b}$ のフーリエ係数などは計算機でかなり計算できる。これは一種の組合せ計算であるから、プログラムを組むのは容易でもかなり時間のかかる計算であり、単純というわけではない。

（2）アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数については、すぐ結果の出る完全に closed な公式は存在しないが、苦労すれば計算機で計算が実行できる程度のことはわかっている。たとえば [12] と見ればよい。この計算については省略するが、2倍のサイズのアイゼンシュタイン級数を対角ブロックに制限するというのは、単なる保型形式の構成法としても意味があると言えるであろう。(そのようにして新しい保型形式を求めた人はほとんどいないけれども。) アイゼンシュタイン級数の pullback formula というのは、おおざっぱに言って次のような形である。

$$\left(\mathcal{D}_{l,(k,j)}E_l\right)\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix} = \sum_i c_l(F_i)F_i(Z_1,u)\otimes F_i(Z_2,v).$$

我々の場合に即して左辺を説明すれば、E_l はウェイト l(偶数) の4次のアイゼンシュタイン級数であり、$Z_i \in H_2$ である。$\mathcal{D}$ は H_4 の関数上の定数係数線形正則微分作用素であり、作用の結果を上のように対角ブロックに制限すると H_2 上の保型形式でウェイトが $\det^k Sym(j)$ のもののテンソルになるもの。ただし、ここで $k \geq l$ であり、$\mathcal{D}$ は l と (k,j) の組に対して（定数倍を除いて）一意的に決まっている。さて、このような微分作用素をとれば、$A_{k,j}(\Gamma_2)$ の基底を $\{F_i(\tau,u)\}$ とすると $F_i(Z_1,u)\otimes F_j(Z_2,v)$ （テンソルの区別をわかりやすくするために右では u のかわりに v を用いた）という形の式の線形結合になるのは明らかである。しかし、さらに $F_i(\tau,u)$ をヘッケ固有関数とすると、実は $F_i\otimes F_j$ $(i\neq j)$ は必要なく、同じもののテンソル $F_i\otimes F_i$ の線形結合で書けることがわかっている。さて、問題は係数である。係数 $c_l(F_i)$ は具体的に書ける初等的な量と $L(l-2,F_i,St)$ の積でかけている。以上は、スカラー値では Boecherer, ベクトル値では小島教知の結果である。

さて、以上の pullback formula を我々の場合に適用するメリットは次の点にある。我々が知りたいのは $F_{13,10a}$ の標準 L 関数の臨界値である。上で $F_i = F_{13,10a}$ とするときに、臨界値はいろいろあるから、$l-2$ がこの臨界値をわたるようにするには、l をいろいろ動かす必要がある。具体的には $l-2=2, 4, 6, 8, 10$ と取る必要がある。しかしターゲットの保型形式はいつでも $S_{13,10}(\Gamma_2)$ の元であるから、微分作用素も5種類用意しなければならない。$S_{13,10}(\Gamma_2)$ は2次元であるから、上で右辺は2つのテンソルの和であり、作用素もフーリエ係数も全部具体的にわかっているとするならば、線形結合の係数を求めることができるはずである。これが我々の計算方針である。

（3）次に微分作用素の説明をしよう。話を少し一般的にして、２つの有界対称領域 Δ, D があって、自然な埋め込み $\Delta \subset D$ があるとする。ここで自然なというのは、左の正則自己同型群（の一部）が右に自然に含まれるような状況を考えている。つまり $Aut(\Delta) \subset Aut(D)$ としている。我々があとで適用したいのは $\Delta = H_2 \times H_2$、$D = H_4$ の場合であるが、それはともかく、一般に、 D の普通の保型因子は制限すれば Δ の保型因子にもなり、これはいわゆる modular embedding である。このときは単に D の保型形式を Δ に制限すれば、これも保型形式になる。しかし我々はもう少し一般的な次のような状況を考える。$\mathbb{C}$ 上の有限次ベクトル空間 V に対して、 Δ の V-valued な保型因子 $J_\Delta \in GL(V)$ を考え、また D の $\mathbb{C}$-valued な保型因子 J_D を考えよう。これらの保型形式で D 上のスカラー値正則関数、または Δ 上の V 値正則関数上への作用が自然に定まる。(十分一般の保型因子ならば、これはいわゆる正則離散系列表現である。）この作用 $|_{J_D}[g]$ または $|_{J_\Delta}[g]$ を $g \in Aut(\Delta)$ に制限して考える。さらに V-valued な定数係数線形正則微分作用素 $\mathbb{D}$ で、任意の $g \in Aut(\Delta) \subset Aut(D)$, に対しては次の次式が可換になるものを考える。

$$
\begin{array}{ccccc}
Hol(D,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathbb{D}} & Hol(D,V) & \xrightarrow{Res.} & Hol(\Delta,V) \\
\downarrow |_{J_D}[g] & & & & \downarrow |_{J_\Delta}[g] \\
Hol(D,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathbb{D}} & Hol(D,V) & \xrightarrow{Res.} & Hol(\Delta,V)
\end{array}
$$

ここで $Hol(X,Y)$ は X 上の Y valued な正則関数のなす空間をあらわす。この図式は、離散群の取り方は関係せず、単に実 Lie 群のあいだの性質をあらわしている。この作用素は正則離散系列の制限による分解の写像などを具体的に与える写像 (intertwining operator) ともいえる。特に適当な $Aut(\Delta)$ の離散群で左の縦の矢印が単位写像と同一ならば、右端の縦の矢印でもそうであるから、これは保型形式を別の保型因子を持つ保型形式にうつしていることになる。(ちなみに Boecherer はこの図式の真ん中の部分の上から下への自然な写像を考えて、それとも可換な作用素を考えている。これは定数係数ではないし、我々のものよりも一層複雑であるが、iterate できるという利点があり、しばしば使われている。ここではこれは直接は利用しない。)

このような微分作用素の一般的な特徴づけは、(Δ, D) がジーゲル上半空間の直積からなっているときは、[5] に述べられている。これは微分作用素を適当な多変数 Q に各座標の偏微分を代入して構成するときに、Q がある種の不変性を持った多重調和関数で与えられることを主張するものである。このような微分作用素の存在や重複度は古典群の分岐則で記述できる。（もちろん古典群の分岐則自身が具体的に求めるのは難しいという困難はある。）この理論は、このような微分作用素を構成する具体的な手段をも与えているが、実際のその計算を実行するのはそう容易ではない。

以上のような微分作用素は少なくとも次の３つの点で面白いと思われる。(1) 新しい特殊関数論の源泉になりうる。たとえば $\Delta = H_1 \times H_1$, $D = H_2$ の場

合は、対応する不変調和多項式は、本質的に Legendre 多項式や Gegenbauer 多項式にほかならない。このような方向の一般化や関係するホロノミー系の理論などは [11], [10] などにある。
(2) この微分作用素を適用することで、与えられたジーゲル保型形式から、これ以外の方法では構成の難しい新しいジーゲル保型形式を構成することができる。 ([1], [8].)
(3) Pullback formula に適用して、L 関数の特殊値の計算に使える。(e.g. [13], [4])

ここではもちろん（３）が関係している。

最近、$\Delta = H_n \times H_n$, $D = H_{2n}$ の場合には、このような微分作用素のある種の新しい closed formula を得ているのだが、一見単純に見える公式というのと実際の計算に使える公式というのはまた話が別である。実際にここで必要な作用素を求めた時はこのような公式はなかったし、この公式により計算が容易になるかどうかは保証の限りではないので、これについては今は述べない。ここでは $\mathcal{D}_{l,(13,10)}$ の求め方の実際について、簡単に触れるだけにして、きわめて複雑な具体形について興味のある方は、すでに存在しているプレプリントをみてもらうことにする。具体的には次のようなことを考える。$2 \times 2l$ の行列 X, Y (成分は変数) を考え、$u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ も変数とする。これらの多項式 $P(X, Y, u, v)$ で、u, v についてはそれぞれ 10 次同次式として、かつ次の条件を満たすものを求めたい。

(1) $P(AX, BY, u, v) = \det(AB)^{13-l} P(X, Y, uA, vB) \qquad A,\ B \in GL_2(\mathbb{C})$
(2) $P(Xh, Yh.u, v) = P(X, Y, u, v) \qquad h \in O(d)$
(3) $\Delta_{i,j}(X)P = \Delta_{ij}(Y)P = 0 \qquad (1 \le i \le 2)$.

ここで $X = (x_{i\nu})$, $Y = (y_{i\nu})$ に対して

$$\Delta_{ij}(X) = \sum_{\nu=1}^{2l} \frac{\partial^2}{\partial x_{i\nu} \partial x_{j\nu}} \qquad \Delta_{ij}(Y) = \sum_{\nu=1}^{2l} \frac{\partial^2}{\partial y_{i\nu} \partial y_{j\nu}}$$

とおいた。(3) の条件は X, Y のそれぞれについて多重調和という条件である。条件 (2) と古典的な不変式の基本定理により $P(X, Y, u, v) = Q(R, S, T, u, v)$ $(R = X\,{}^tX,\ S = Y\,{}^tY,\ T = X\,{}^tY)$ となるような多項式 Q が存在する。これに対して

$$\mathcal{D}_{l,(13,10)} = Q\left(\frac{\partial}{\partial Z_1}, \frac{\partial}{\partial Z_2}, \frac{\partial}{\partial Z_{12}}, u, v\right)$$

とおけばこれが求める微分作用素である。このような微分作用素が定数倍を除き一意的なのは、[5] の一般論である。ここで $Z \in H_4$ に対して、

$$Z = (z_{ij}) = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix}$$

$(Z_i \in H_2,\ Z_{12} \in M_2(\mathbb{C}))$ とし、

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial Z_1} & \dfrac{\partial}{\partial Z_{12}} \\ {}^t\!\left(\dfrac{\partial}{\partial Z_{12}}\right) & \dfrac{\partial}{\partial Z_2} \end{pmatrix}$$

によって $\dfrac{\partial}{\partial Z_i}$ などを定義した。次に、具体的に P を求める方法であるが、条件 (1) より、R, S, T の多項式としての次数はわかる、$(A,B) \in GL(2) \times GL(2)$ の作用は、$AR^tA,\ BS^tB,\ AT^tB$、uA, uB となるが、これは２次対称テンソルとか標準表現とかであって、さらにこれらの対称テンソルないしはテンソルを取ったものが、R, S, T, u, v の成分の多項式上への表現として実現されていることになる。この表現の分解の様子や次元などは指標の計算をすればわかるので、条件 (1) を満たす多項式の次元は確定できる。また少し考えるとその基底も構成できる。そうはいっても、これはなかなか面倒で $(k,j) = (13,10)$ について、$l = 4, 6, 8, 10, 12$ のときに、それぞれ、このような多項式の次元は 465, 270, 134, 51, 11 である。さて、条件 (3) によれば、これらの線形結合で X, Y それぞれについて多重調和なものは１次元しかないはずである。この条件は線形な条件であるから連立一次方程式を解けば、答が得られる。もちろん手で計算できるような方程式ではなく計算機でも慎重にやらないと答がでない。しかも線形結合の係数は相当複雑である。しかしとにかくこれを実行することができて、その具体的な形と E_l のフーリエ係数を用いれば必要なデータが手に入り、pullback formula の係数および標準 L 関数の臨界値が求まる。

もちろん同様の方法で２次ベクトル値ジーゲル保型形式の臨界値は他の場合でも原理的には計算可能であり、実際に数値の計算ができるかどうかは、どの程度面倒をいとわないかどうか（と計算機の能力）のみにかかっている。

以上の内容について、詳しくはプレプリント [9] を参照されたい。

References

[1] H. Aoki and T. Ibukiyama, Simple Graded Rings of Siegel Modular Forms, Differential Operators and Borcherds Products, International J. Math. Vol. 16 No. 3 (2005), 249–279.

[2] S. Böcherer, T. Satoh and T. Yamazaki, On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **42** (1992), 1–22.

[3] P. Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 33(1979), part 2, pp.313-346.

[4] N. Dummigan, T. Ibukiyama and H. Katsurada, Some Siegel modular standard L-values, and Shafarevich-Tate groups, J. Number Theory **131** (2011), 1296–1330.

[5] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluriharmonic polynomials, Commentarii Math. Univ. St. Pauli 48(1999), 103–118.

[6] T. Ibukiyama, Conjecture on a Shimura type correspondence for Siegel modular forms, and Harder's conjecture on congruences, *Modular Forms on Schiermonnikoog* Edited by Bas Edixhoven, Gerard van der Geer and Ben Moonen, Cambridge University Press (2008), 107-144.

[7] T. Ibukiyama, Numerical example of a Siegel modular form having the cubic zeta function, preprint 2003.

[8] T. Ibukiyama, Vector values Siegel modular forms of symmetric tensor weight of small degrees, to appear in Comm. Math. Univ. St. Pauli Vol. 61 No. 1.

[9] T. Ibukiyama and H. Katsurada, Exact critical values of the symmetric fourth L function and vector valued Siegel modular forms, preprint 2011.

[10] T. Ibukiyama, T. Kuzumaki and H. Ochiai, Holonomic systems of Gegenbauer type polynomials of matrix arguments related with Siegel modular forms, J. Math. Soc. Japan Vol. 64 No.1(2012), 273–316.

[11] T. Ibukiyama and D. Zagier, Higher spherical polynomials, in preparation.

[12] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, Amer. J. Math. **121** (1999), no.2, 415-452.

[13] H. Katsurada, Exact standard zeta-values of Siegel modular forms, *Experiment. Math.* **19** (2010), 65–77.

[14] H. H. Kim and F. Shahidi, Functorial products for $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ and the symmetric cube for GL_2. With an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart. Ann. of Math.(2) 155(2002). no.3, 837–893.

[15] N. Kozima, On special values of standard L-functions attached to vector valued Siegel modular forms, Kodai Math. J. 23(2000), 255-265.

[16] D. Ramakrishnan and F. Shahidi, Siegel modular forms of genus 2 attached to elliptic curves, Math. Research Note 14, No. 2 (2007), 315–332.

[17] D. Zagier, Modular forms whose coefficients involve zeta-functions of quadratic fields, *Modular functions of one variable VI*, Springer Lecture Notes in Math. 627(1977), 105–169.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University,
Machikaneyama 1-1, Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan,
ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp

Muroran Institute of Technology
27-1 Mizumoto, Muroran 050-8585, Japan
hidenori@mmm.muroran-it.ac.jp